

Roll No

BT-102 (GS)**B.Tech., I & II Semester**

Examination, December 2023

Grading System (GS)**Mathematics-I****Time : Three Hours****Maximum Marks : 70****Note:** i) Attempt any five questions.

किन्हीं पाँच प्रश्नों को हल कीजिए।

ii) All questions carry equal marks.

सभी प्रश्नों के समान अंक हैं।

iii) In case of any doubt or dispute the English version question should be treated as final.

किसी भी प्रकार के संदेह अथवा विवाद की स्थिति में अंग्रेजी भाषा के प्रश्न को अंतिम माना जायेगा।

1. a) State Lagrange's theorem hence verify for $f(x) = x^2 + 2x$ defined in the interval $[-2, 0]$.लैग्रेंज की प्रमेय बताइए इसलिए अंतराल $[-2, 0]$ में परिभाषित $f(x) = x^2 + 2x$ के लिए सत्यापित करें।b) Find the first six terms of the expansions of the function $e^x \cos y$ in a Taylor series in the neighbourhood of the point $(0, 0)$.बिंदु $(0, 0)$ के पड़ोस में एक टेलर श्रृंखला में फलन $e^x \cos y$ के विस्तार के पहले छह पद खोजें।

2. a) Estimate the extreme values of the function

$$x^3 + y^3 - 63(x + y) + 12xy.$$

फलन $x^3 + y^3 - 63(x + y) + 12xy$ के चरम मूल्यों का अनुमान लगाइए।b) If $u = u\left(\frac{y-x}{xy}, \frac{z-x}{xz}\right)$ find the value of

$$x^2 u_x + y^2 u_y + z^2 u_z.$$

यदि $u = u\left(\frac{y-x}{xy}, \frac{z-x}{xz}\right)$ है तो $x^2 u_x + y^2 u_y + z^2 u_z$ का मान ज्ञात कीजिए।

3. a) Show that the rectangular solid of maximum volume that can be inscribed in a given sphere is a cube.

दिखाइए कि अधिकतम आयतन का आयताकार ठोस जिसे किसी दिए गए गोले में अंकित किया जा सकता है, एक घन है।

b) Find $\frac{du}{dt}$ if $u = x^2 + y^2, x = a \cos t, y = b \sin t$.यदि $u = x^2 + y^2, x = a \cos t, y = b \sin t$ है तो $\frac{du}{dt}$ ज्ञात कीजिए।4. a) Change the order of integration in $\int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} xy \, dy \, dx$ and hence evaluate. $\int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} xy \, dy \, dx$ में एकीकरण के क्रम को बदलें और इसलिए मूल्यांकन करें।b) i) Find the value of $\left| -\frac{3}{2} \right|$. $\left| -\frac{3}{2} \right|$ का मान ज्ञात कीजिए।ii) Evaluate $\int_0^1 x^3 (1-x)^5 \, dx$. $\int_0^1 x^3 (1-x)^5 \, dx$ का मूल्यांकन करें।

[3]

5. a) Test the series $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{10} + \dots + \frac{x^n}{n+1} + \dots$

$$1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{10} + \dots + \frac{x^n}{n+1} + \dots \text{ श्रृंखला का परीक्षण करें।}$$

- b) Expand $f(x) = x \sin x$, $0 < x < 2\pi$ as a Fourier series.
फूरियर श्रृंखला के रूप में $f(x) = x \sin x$, $0 < x < 2\pi$ का विस्तार करें।

6. a) Show that
सिद्ध कीजिए

$$\beta(l, m) = \frac{\sqrt{l|m}}{\sqrt{l+m}}$$

- b) Expand as a half range $f(x) = x$ sine series and cosine series for the interval $0 < x < 2$.
अंतराल $0 < x < 2$ के लिए $f(x) = x$ ज्या श्रृंखला और कोज्या श्रृंखला के रूप में विस्तार करें।

7. a) Transform the following matrix into normal form and

$$\text{hence find its rank} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 14 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

निम्नलिखित आव्यूह को सामान्य रूप में परिवर्तित करें और इस प्रकार इसकी रैंक ज्ञात करें।

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 14 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

[4]

- b) Find the inverse of $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ by using elementary row transformations.

प्रारंभिक पंक्ति परिवर्तनों का उपयोग $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात करें।

8. a) Find the eigen values and eigen vectors of matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ के आइगेन मान और आइगेन सदिश ज्ञात कीजिए।

- b) Test the consistency and hence, solve the following set of equations
 $x + 2y - z = 3$, $3x - y + 2z = 1$, $2x - 2y + 3z = 2$, $x - y + z = -1$
निरंतरता का परीक्षण करें और इसलिए, समीकरणों के निम्नलिखित निकाय को हल करें।
 $x + 2y - z = 3$, $3x - y + 2z = 1$, $2x - 2y + 3z = 2$, $x - y + z = -1$
